

シリカガラス接合界面付近の
OH 濃度分布測定に及ぼす集光の効果

2011 年 2 月
分子科学講座
西野 正宏

シリカガラス接合界面付近の OH 濃度分布測定に及ぼす集光の効果

提出 2011 年 2 月 8 日
学籍番号 07380364
氏名 西野 正宏
指導教員 葛生 伸

シリカガラスの表面を研磨して接合・加熱すると 2 枚のシリカガラスは接合する。そこでシリカガラス接合界面付近での OH 基の分布を解析すると、接合界面付近で滑らかに変化していた。この滑らかな変化は本当に OH 基が拡散しているためか、それとも顕微鏡を使った測定時に光を集光しているための見かけのものか判別がつかない。もしも測定ビーム集光効果によるものであれば、入射光の集光角度を変化させ測定すると変化するはずである。

そこでビームにしぼりを取り付け、レンズ開口数 $NA = n \sin \theta$ (n : 屈折率, θ : 入射光の集光角度) を変化させて、接合界面付近の OH 基濃度変化を測定した。その結果を OH 基の拡散がない場合の理論式と比較することにより、熱処理に伴う OH 基の拡散の有無の検証を行うことにした。

OH 基濃度の異なる 4 種類のシリカガラス ES (OH \approx 1000 ppm), ED-H (OH \approx 80 ppm), ED-B (OH \approx 10), ED-C (OH \approx 5) を用い、OH 基濃度の異なる 2 枚のガラスを 1150°C で 30 分加熱することにより接合したものの接合界面付近での OH 基濃度分布を測定した。

図 1 に示すように NA (レンズ開口数) の違いによる変化は少なく、接合界面付近での OH 基濃度が滑らかに変化している。図 2 は NA = 0.36 で OH 基の拡散なく接合界面で OH 基濃度が階段関数的に変化したと仮定した場合の理論曲線と比較した図である。結果は理論曲線よりもより滑らかに分布している。

以上のことから、OH 基が熱処理によって実際に拡散しているものと考えられる。

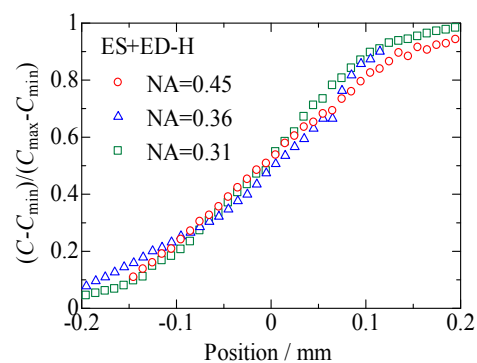


図 1 OH 基濃度分布の例

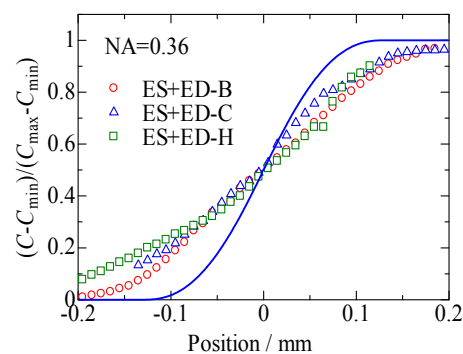


図 2 理論曲線との比較の例

目次

第1章 序章	
1.1 シリカガラス	1
1.2 シリカガラスの特性	3
1.3 シリカガラスの種類	4
1.4 各種シリカガラスの製法と性質	5
1.5 シリカガラス中の OH 基	8
1.6 赤外分光の原理	9
1.7 本研究の目的	16
第2章 実験方法	
2.1 測定方法	17
2.2 OH 基濃度の算出方法	19
2.3 ビーム集光の尺度	21
2.4 接合界面における OH 基濃度分布に及ぼすビーム集光の効果	23
2.5 試料	26
第3章 実験結果	
3.1 OH 基濃度分布	27
3.2 理論曲線と実験結果の比較	29
3.3 考察	31
第4章 まとめ	32
参考文献	33
謝辞	34
付録	35

第 1 章 序章

1.1 シリカガラス

シリカガラスは組成式が SiO_2 である非晶質材料である。非晶質材料とは結晶のような周期的構造がみられない材料である。シリカ (SiO_2) は地殻の約 55% を占めており、岩石の主要な構成成分となっている (表 1.1.1)。シリカには多数の結晶型がある。これをシリカの多像という。シリカ結晶の種類は実験室で作られたものを含めると 20 種類以上、計算機シミュレーションでその存在が予想されているものを含めると 40 種類にもなる。図 1.1.1 にシリカの結晶の例を示す。シリカ結晶は SiO_4 正四面体構造が基本となっている (図 1.1.2)。すなわち Si を中心に 4 つの酸素原子が正四面体の頂点を形成し、その頂点を共有して 3 次元的な網目構造を形成している。シリカガラスも同様の SiO_4 正四面体構造が頂点の O を共有して三次元的網目構造を形成している。ただし、結晶のような周期構造を持たない「非晶質」である。

表 1.1.1 地殻の主要成分¹⁾

成分	SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	FeO	MnO	MgO	CaO	Na_2O	K_2O	P_2O_3
組成 (%)	55.2	1.6	15.3	2.8	5.8	0.18	5.2	8.8	2.9	1.9	0.3

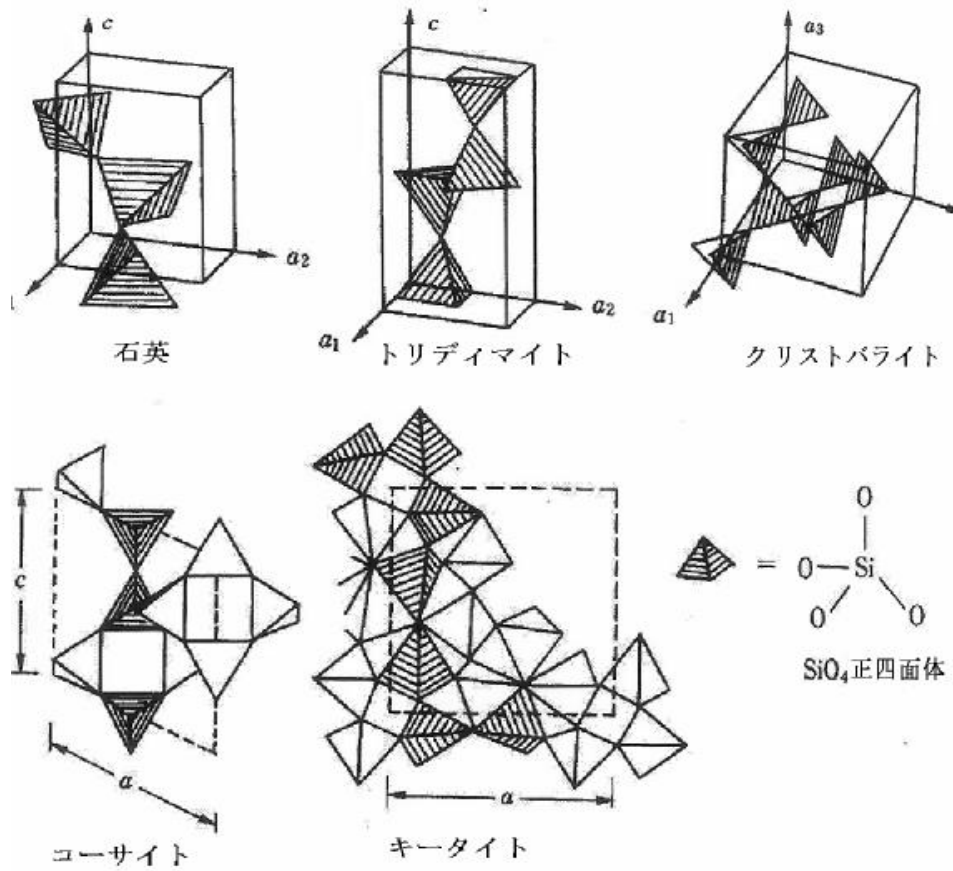


図 1.1.1. シリカの種々の結晶型の例

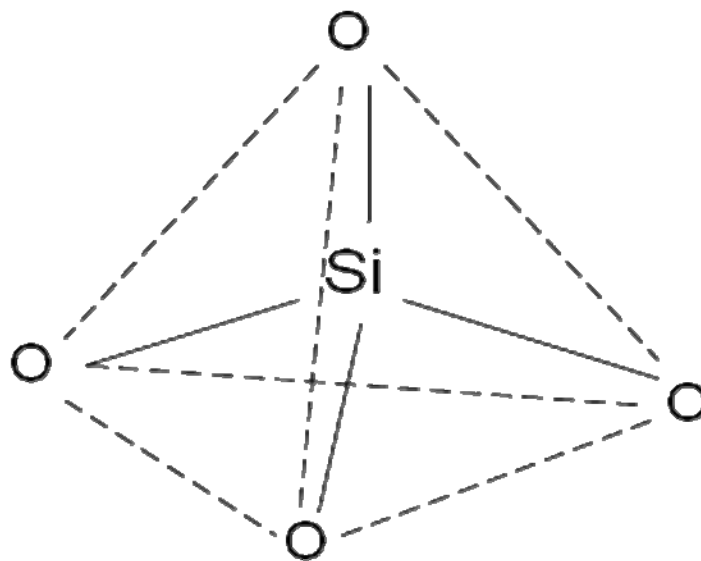


図 1.1.2. シリカガラスの構造単位

1.2 シリカガラスの特性

シリカガラスは窓ガラスなどの多成分ガラスとは違い金属不純物をほとんど含まない。そのために、多成分ガラスには見られない優れた特徴をもっている。まとめると、

- ① 光をよく通す。
- ② 熱に強い。
- ③ 高純度。
- ④ 化学的耐久性に優れている。

となる。

①の光をよく通すという性質は広い波長で光をよく通すということである。シリカガラスでは、おおよそ 150~3400 nm の範囲で光を通す。また、シリカガラスは紫外線や放射線照射による光吸収帯が生じにくい。この性質を利用して紫外線用光学材料や光ファイバーに用いられている。

②の「熱に強い」性質は、高温で変形しにくいという性質による。シリカガラスは高温で変形しにくいだけでなく、他の材料に比べて線膨張係数が小さい(表 1.2.1)。そのため、比較的急激な温度変化に対しても耐性がある。熱に強い性質を利用して、高温で使用される半導体製造装置や高輝度放電ランプや赤外線ヒーターの管球に用いられている。

③の純度が高いという性質は、金属不純物が非常に少ないということである。天然の石英を熔融した熔融石英ガラスでは Al の元素を 10 ppm 台含むものも製造方法によってはあるが、それ以外の元素の濃度は 1 ppm 未満である。さらに、シリカガラスは多くの酸やアルカリに溶けにくいという性質をもっている。このためシリカガラスは④の化学的耐久性に優れている。

表 1.2.1 様々な材料の線膨張係数

	熱膨張係数 (10^{-7} K^{-1})	石英ガラスを 1 と した値	25 m の棒が 50°C の温度変化で伸び る量 (mm)
石英ガラス	5.5	1	0.68
窓板ガラス	100	18	12.5
鉄	135	25	17.9
アルミニウム	230	45	28.8
銅	167	30	20.9

1.3 シリカガラスの種類

シリカガラスは化学式（組成式）で表すと SiO_2 である。この材料は前節で述べたように数々の優れた性質を持っている。実際に使用される場面では、極限の性質が要求される場合が多い。そのため、製造方法や製造条件によって異なる微妙な性質の違いが工業製品として使用される場合重要になることが多い。そこで、シリカガラスは、その製造方法により使い分けられている。

シリカガラスの製造方法は 2 種類に大別されている（図 1.3.1）。ひとつは天然の石英粉を溶融することにより作られた「溶融石英ガラス」とよばれるものである。もうひとつは液体原料から加水分解または熱酸化により合成した、合成シリカガラスとよばれるものである。溶融石英ガラスは製造方法の違いにより I 型、II 型と呼ばれるものに分類されている。合成シリカガラスの中も III 型、IV 型、スート法、ゾル・ゲル法などに分類されている（図 1.3.1）。

溶融石英ガラスは合成シリカガラスに比べて製造コストが安いこと、熱に強いことが特長である。一方、溶融石英ガラスは製造時の粒子の痕跡が残っており、泡や異物などが比較的多い。

さらに、紫外線領域で欠陥構造による光吸収帯が存在する。そのため、光学的性質は合成シリカガラスに比べ劣っているといえる。そこで光学材料にはほとんど合成シリカガラスが用いられている。

次に、各種シリカガラスの製造法と性質について述べる。

1.4 各種シリカガラスの製法と性質

1.4.1 熔融石英ガラス

① I型

I型シリカガラスは電気熔融石英ガラスともよばれ、これは熔融に電気炉やアーク放電に伴い熱などを用いる方法である。I型熔融石英ガラスは熔融に電気を使うため、OH基濃度が少ない。

② II型

II型シリカガラスは火炎熔融石英ガラスともよばれ、これは酸水素火炎という、酸素と水素の反応を利用した炎をつかって天然の石英の粉を融かすことによる製造方法である。熔融する際に酸素と水素の反応による水が生成するため、OH基濃度はI型熔融石英ガラスに比べて多い。

1.4.2 合成シリカガラス

① III型

III型シリカガラスは「直接法合成シリカガラス」とも呼ばれ、これは酸水素火炎中でケイ素の化合物 (SiCl_4 など) を加水分解することによる製造方法である。火炎中で生成する水分子と原料のケイ素化合物との加水分解によりOH基が生じる。そのためOH基濃度が非常に高いのが特徴である。

② IV型

IV型シリカガラスはプラズマ法合成シリカガラスともよばれ、これは SiCl_4 などのケイ素の化合物を誘導プラズマ炎の熱により酸化させることにより製

造したものである。原料を熱酸化させる方法なので OH 基濃度は極めて低いのが特徴である。

③ スート法合成シリカガラス

スート法は、光ファイバー用のシリカガラスとして光に吸収の原因となる不純物がなく、OH 基濃度のきわめて低い材料の合成方法として開発された。スート法にはその作り方により内付け CVD (MCVD)法、OVD 法、VAD 法などがある。

内付け CVD 法は、石英ガラス管の中を四塩化ケイ素と酸素を流し、外側からバーナーであぶることによる熱分解によりシリカの微粒子(スート)をガラス管内に堆積させ、その後加熱して内部をガラス化しファイバーに引っ張るもととなるロッド(プリフォーム)を作る方法である。

OVD 法はシリカガラス棒の外側にちょうどちくわのようにスートを堆積させ、芯の石英ガラス棒を抜いたのち、1500°C以上の温度に加熱してガラス化する方法である。

VAD 法では、比較的低温で多孔質のシリカ塊を合成し、塩素などで処理することにより OH 基を除去する。さらに、1500~1600°Cの温度で焼き固めてガラス化する方法である。この VAD 法で作られた石英ガラスは耐熱性にも優れているため、光ファイバー用途の他に、液晶表示装置に用いられる薄膜トランジスタ(TFT)の基板としても用いられる。

④ ゼル・ゲル法合成シリカガラス

ゼル・ゲル法合成シリカガラスは、液体中でゲル体を作り乾燥させて高温で焼き固めてガラスにする製法である。しかし、実際には乾燥に時間がかかることや、焼付け時に割れるなどの理由のために塊状のガラスとしての商品化はされていない。ただし、ガラスや金属表面のコーティングの様な薄膜形成の方法として用いられている。

表 1.4.1 にシリカガラスの各種の製造方法、性質及び用途をまとめた。

表 1.4.1 各種シリカガラスの比較

分類	熔融		合成				
	電気熔融	火炎熔融	直接法	プラズマ 法	スート法	ゾルゲル法	
原料	水晶	水晶	四酸化 ケイ素	四酸化 ケイ素	四酸化 ケイ素	アルキシル ケート	
製造 方法	アークプラズマ 電気炉	酸水素 火炎熔融	酸水素火炎溶 融・加水分解 による直接堆 積ガラス化	高周波 プラズマ	スート合成 (電気炉)	ゾル・ゲル 化 →乾燥 (電気炉)	
不 純 物	OH [ppm]	～10	100～300	500～1500	<5	<1～200	<2
	金属 [ppm]	10～ 100	<100	<1	<1	<0.1	<1
光 学 的 性 質	紫外線 吸収体	あり	あり	なし	あり	低 OH のみ あり	なし
	赤外線 吸収体	小	やや大	大	なし	なし ～やや大	なし
用 途	半導体製造用 (炉芯管、治具) ランプ材	半導体製造 用 (炉芯管、治 具、洗浄槽) シリカガラ ス繊維	フォトマスク	光ファイ バー	光ファイバ ー 光学材料 (真空紫外 ～近赤外) TFT 基盤 フォトマス ク	シリカガラ ス繊維	

1.5 シリカガラス中の OH 基

OH 基は水酸基ともいい、シリカガラス中に $\equiv\text{SiOH}$ の形で存在する。これは、シリカガラス製造過程で生成したものである。

OH 基はシリカガラスの様々な物性に影響を及ぼす。OH 基が多いとシリカガラス骨格構造の緩和時間が短くなる。そのため、より低温で流動するようになる。放射線や紫外線に対する耐久性にも影響する。OH 基による光吸収が赤外線領域の 3600 cm^{-1} 付近にある (図 1.5.1)。この吸収強度を用いて OH 基濃度の定量を行う。

この測定のためには、赤外分光光度計を用いる。次節で赤外吸収の測定方法とその原理について述べる。

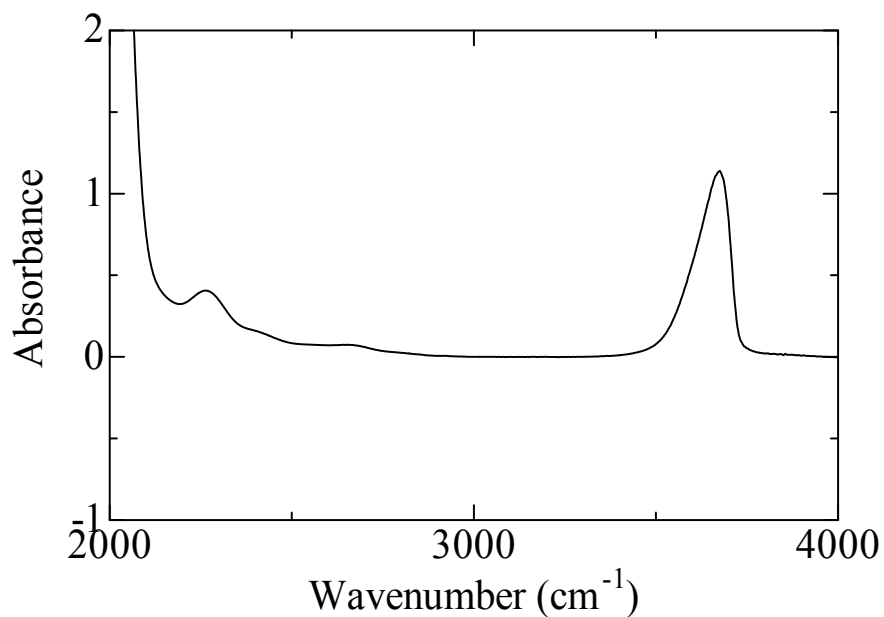


図 1.5.1 赤外吸収スペクトルの例

1.6 赤外分光の原理

本研究で OH 濃度測定に用いた装置はフーリエ変換赤外分光光度計と呼ばれる装置に赤外顕微鏡とよばれるものを接続したものである。

この2つをあわせた装置を「顕微赤外分光光度計」と呼ぶ。使用した装置は日本分光製 Herschel FT/IR-660 型フーリエ変換赤外分光光度計に Irtron IRT- 30-16-IRP 型赤外顕微鏡を接続したものである。装置を図 1.6.1 に示す。

その装置の原理を述べる。同種の装置でも、メーカー機種によって違いがあるので、ここで述べることは上記の機種に特有のものである。まず、フーリエ変換赤外分光光度計の測定原理から説明する。



日本分光 Herschel FT/IR-660 型フ
ーリエ変換赤外分光光度計

Irton IRT-30-16-IRP 型赤
外顕微鏡

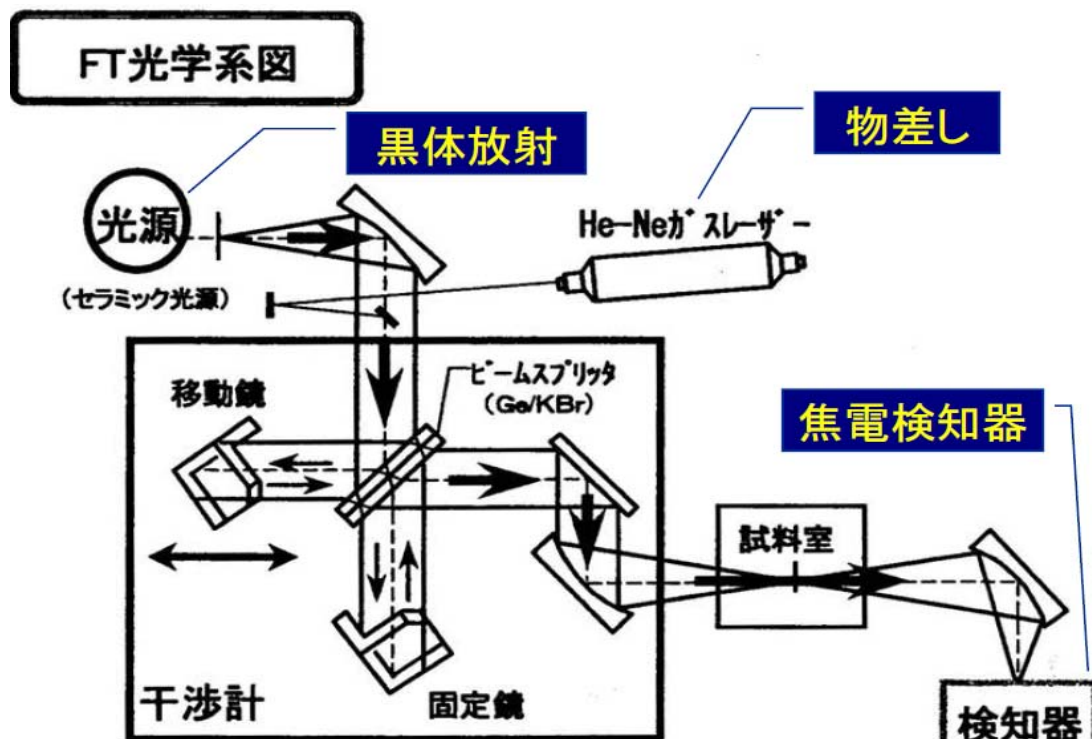


図 1.6.2 日本分光 Herschel FT/IR-660 型フーリエ変換赤外分光光度計の光学系

図 1.6.2 に測定装置の光学系を示す。光源にセラミックス光源を用いている。セラミックス光源は発熱したときの発光を利用したもので電気ストーブのヒーターのようなものである。

この図のように光源から出た赤外線は、ビームスプリッタで赤外線を左の移動鏡と下の固定鏡に分けられる。移動鏡を動かして、検知器（焦電検知器）の方へ赤外線を送る。図の四角形の太線で囲んだ部分はいわゆる「マイケルソンの干渉計」と呼ばれるものであり、移動鏡、固定鏡は「コーナーキューブミラー」と呼ばれるものである。立方体の角の部分の中側を鏡にしたものである。この鏡に当たった光は確実に入射方向に反射する。道路や自転車の反射板などはプリズム状のコーナーキューブが使われていて、入射方向に確実に反射するようになっている。移動鏡は、一波長分の長さ動かす。移動鏡を反射した光はビームスプリッタで固定鏡を反射した光と一つになる。すると、それぞれの光の位相差によって干渉するため、移動鏡の移動に伴い光の強度が変化する。その光の強度変化をサンプルを通して検知器で検出する。その光強度の移動鏡の移動距離に対する変化をフーリエ変換することにより、光強度の波数（光の波長の逆数）依存性を求める（図 1.6.3）。

波長と波数の間には、

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} \quad (1.6.1)$$

の関係がなりたつ。波数は cm^{-1} 単位で表す。この単位は「カイザー」と読む（英語では“wave number”と呼ぶ）。nm 単位で表した波長から波数を換算するには、

$$\tilde{\nu} = \frac{10^7 [\text{cm}^{-1} \cdot \text{nm}]}{\lambda} \quad (1.6.2)$$

とすればよい。

赤外吸収スペクトルは吸光度と呼ばれる量を波数に対して示したものである。吸光度はサンプルを入れた場合の強度 $I(\tilde{\nu})$ とサンプルを入れない場合（reference）の強度 $I_0(\tilde{\nu})$ から、

$$a(\tilde{\nu}) = \log_{10} \left(\frac{I_0(\tilde{\nu})}{I(\tilde{\nu})} \right) \quad (1.6.3)$$

によって求められる。

通常は以上のようにして吸収スペクトルを求める。しかしながら、本研究では非常に微少な領域での OH 濃度の測定が必要となるため、赤外線顕微鏡ユニットを接続して測定する。

図 1.6.4 に赤外顕微鏡 Irtron IRT-30-16-IRP 型赤外顕微鏡の光学系を示す。

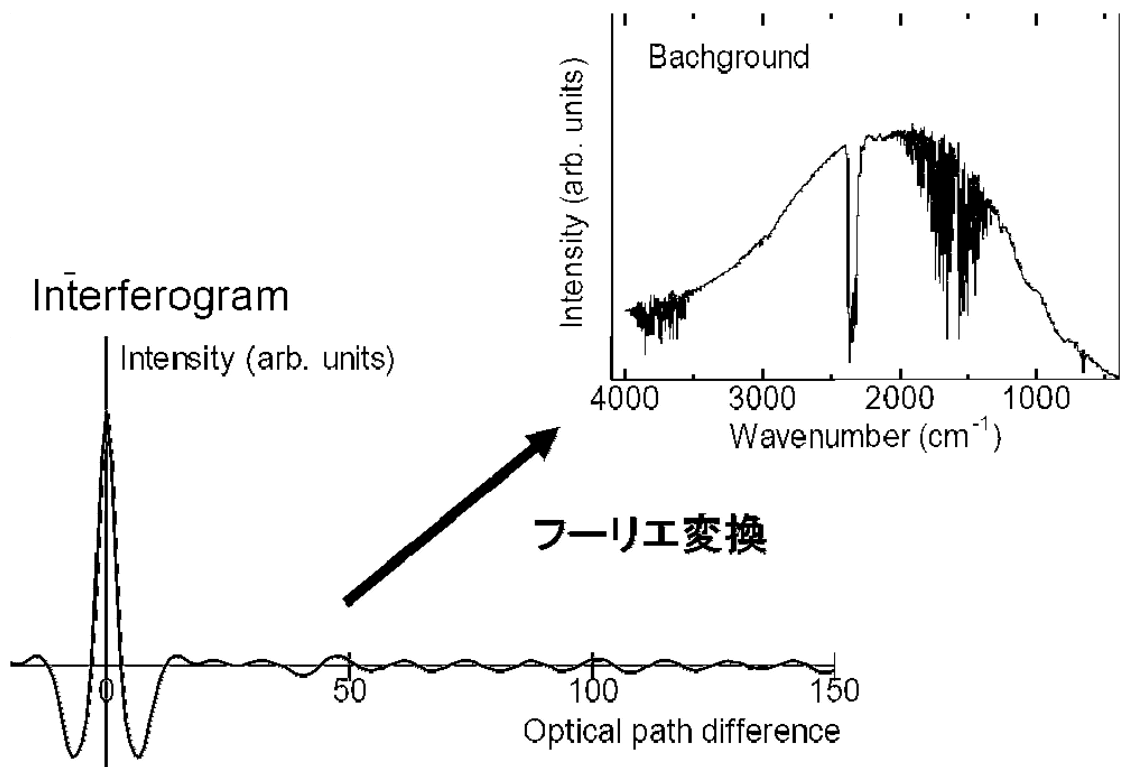


図 1.6.3 移動鏡の変動に伴う光強度の変化

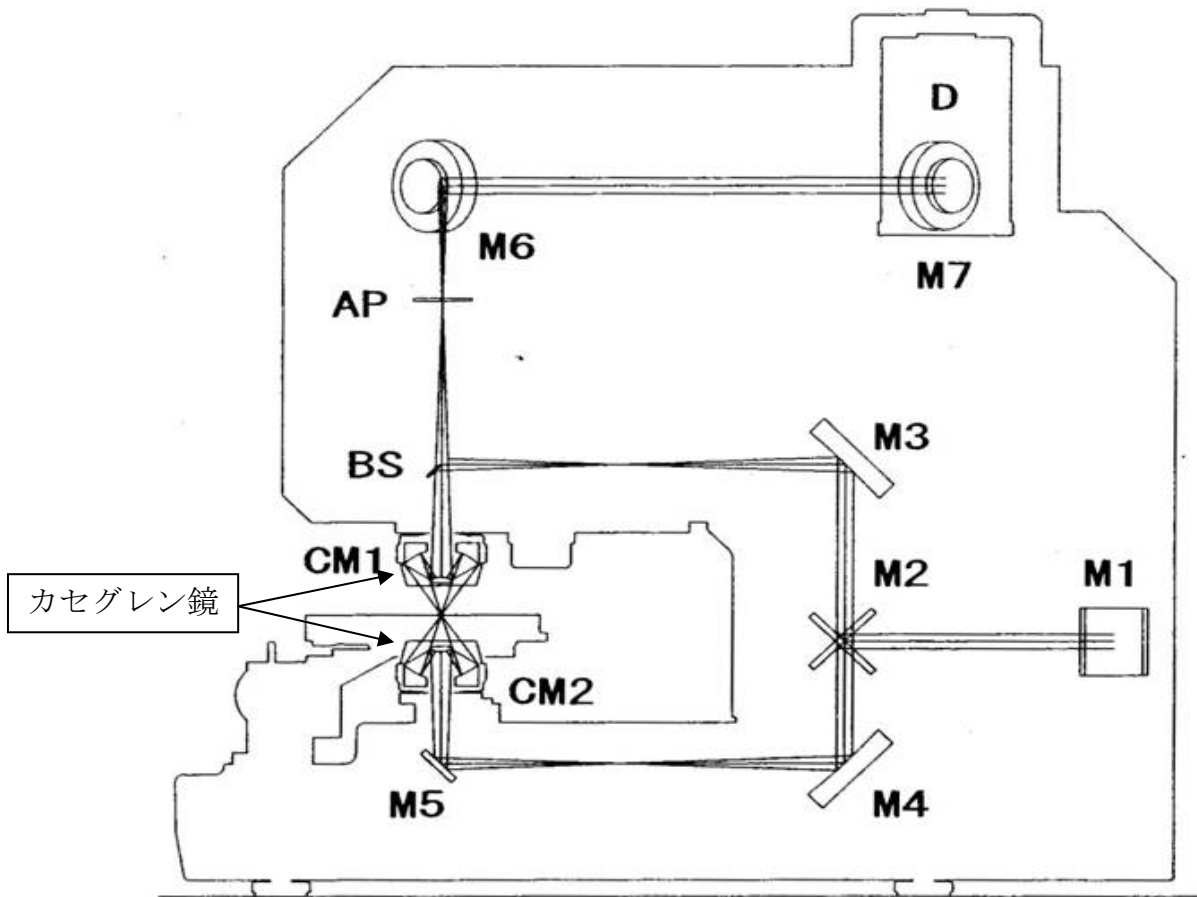


図 1.6.4 Irton IRT-30-16-IRP 型赤外顕微鏡



図 1.6.5 カセグレン鏡

本体から赤外顕微鏡内に入射した赤外線は反射／透過切り替え用ミラーM2で光路を切り替える。光を下の方に導いた場合はサンプルの光透過スペクトルが測定できる。光を上を導いた場合光反射スペクトルが測定できる。本研究では透過スペクトルを測定した。そこで、透過測定の場合についてのみ説明する。M2で下側に導いた光は反射鏡M4、M5を通り、カセグレン鏡（図1.6.5）とよばれるレンズの作用をする反射光学系CM2を通して、入射光を集光した上でサンプルに入射する。焦点はサンプル内又は上下面のいずれかにとる。これによって非常の狭い範囲の透過スペクトルを測定することができる。サンプルを透過した光は再びカセグレン鏡CM1を通り平行光束に戻したのち、反射鏡に照射する。そして出てきた波長を半導体検知器で測定をする。顕微測定に用いるビームの強度は弱く、半導体検知器は非常に感度が良いため、熱によるノイズを除去するため液体窒素で冷却している。

検出した信号の処理、吸収スペクトルの求め方については本体の場合と同様である。

1.7 本研究の目的

シリカガラスの表面を平坦に研磨して接触・加熱するとシリカガラスを接合することができる。

この接合技術は、分光光度計で使用するセルなどを製造する時に使われる。また、レーザービームを均一化するために用いられるフライアイレンズ(蠅の目レンズ)と呼ばれる凸レンズが束になった光学部品などを製造するとき小さなレンズを貼り合わせる(束ね合わせる)のに使われる。さらに「マイクロリアクター」と呼ばれる微少な化学反応を起こさせる流路をもった反応器を作るのにも用いられている。

このようにシリカガラスの接合技術は工業的に広く使われている。しかしながら、そのメカニズムについてはほとんど研究されていない。これまで、接合時のOH基などの拡散を調べるために接合試験を行い、接合界面付近でのOH基の分布を解析した。その結果、OH基濃度の異なるシリカガラスを接合した場合、接合界面付近でOH基濃度が緩やかに変化していた。そのため、接合したシリカガラス間でOH基の拡散が生じているように思われた。顕微分光での測定のため、測定ビームは絞り込まれている。さらに、サンプルは有限の厚さを持っている。したがって、階段関数的に変化している場合でも、見かけ上緩やかに変動すると考えられる。データからだけでは、この緩やかな変化は本当にOH基濃度が拡散しているためか、それとも測定時に光を集光しているための見かけのものか判別ができない。

もしも、OH基濃度の緩やかな変化がビーム集光によるものであれば、測定ビームの集光の角度を変えると変化するはずである。そこでビームにしぼりを取り付けることによってビームの入射光の集光角度を変化させて、接合界面付近のOH基濃度変化を測定した。測定で得られた変化と、階段関数的にOH基が変化したときを比較することによって、熱処理によるOH基の拡散の有無を調べることが本研究の目的である。

第2章 実験方法

2.1 測定方法

OH 基濃度は赤外吸収スペクトルから求める。第1章で説明したように測定には顕微赤外分光光度計 (日本分光 Herschel FT/IR-660 型フーリエ変換赤外分光光度計に Irtron IRT-30-16-IRP 型赤外顕微鏡をつけた装置) を使用した。試料を置くステージ下部にしぼりを取り付けることによってビームの大きさを調節した(表 2.1.1)。図 1.2.1, 1.2.2 に測定装置、しぼりの写真を示した。

サンプルの端から数十 μm ずつ稼動して測定を行った。ビームの焦点は試料の中央部にあわせた。

表 2.1.1 しぼりの間隔

しぼりの間隔 D (mm)
5.0
6.0
8.5



図 2.1.1 顕微赤外分光光度計

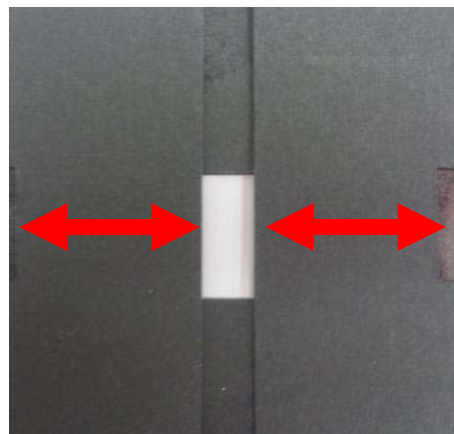


図 2.1.2 しぼり

2.2 OH 基濃度の算出方法

透明物質の光の吸収についてランベルト・ベールの法則

$$I = I_0 10^{-\epsilon ct} \quad (2.2.1)$$

が成り立つ。ここで、 c は光を吸収するものの濃度、 t はサンプルの厚さ、 ϵ は光を吸収するもの固有の量でモル吸光係数と呼ばれる。

シリカガラス中の OH 基濃度はこの法則をもとに求めることができる。シリカガラスの OH 基濃度は、測定した赤外吸収スペクトルのうち図 2.2.1 に示すような 3600 cm^{-1} 付近のピーク強度を用いる。縦軸は (1.6.3) 式で定義される吸光度である。吸光度 a の値は、(1.6.3) 式および (2.2.1) 式から、

$$a = \epsilon ct \quad (2.2.2)$$

となる。シリカガラスでは $\epsilon = 77.5 \text{ dm}^3/\text{g cm}$ である。

これらの式および値を用いると OH 基濃度は、

$$C_{\text{OH}} = \frac{a}{\epsilon t} \quad (2.2.3)$$

から計算することができる。本研究では、ビームを集光している。そのため、部分によって光路長が違う。しかしながら、本研究では集光角は最大で 18.5° 程度である。したがって光路の違いは最大でも 2% 未満である。そのため、光路長の分布は無視できる。

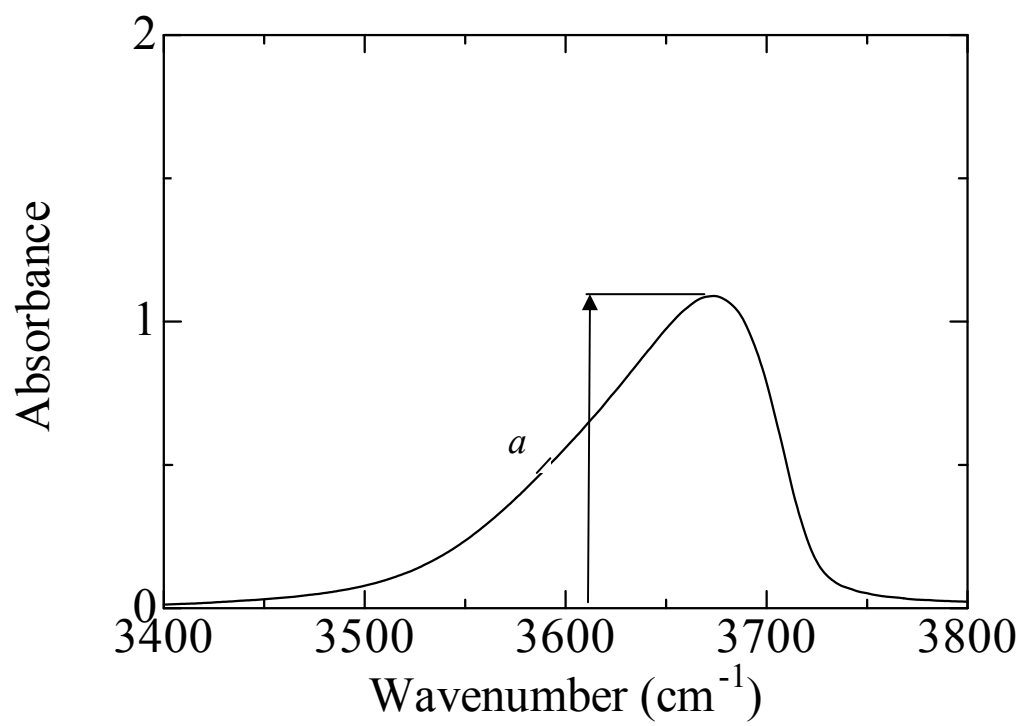


図 2.2.1 OH 基による吸収ピークの例

2.3 ビーム集光の尺度

ビーム集光の尺度として NA (numerical Aperture [レンズ開口数]) とよばれる量を用いる。NA は

$$NA = n \sin \theta \quad (2.3.1)$$

で定義される。ちなみに NA は N かける A ではなく、NA で一つの値を表す。本来の数式の表し方からするとおかしいが、習慣にしたがってこのように記すことにする。ここで、 n は試料の屈折率、 θ は集光角である (図 2.3.1)。NA 量は装置固有の値である。試料の屈折率があるのは、試料内に入った光の屈折の効果を考慮し、試料内でもこの式が適用できるようにするためである。NA は、しぼりの間隔 D およびしぼりとステージとの距離 h 、サンプルの厚さ t から

$$\tan \theta = \frac{D}{t + 2h} \quad (2.3.2)$$

によって求めることができる。

ここで、しぼりの間隔 D と、しぼりとステージとの距離 h はノギスを用いて測定をした。屈折率はシリカガラスの OH のピークに当たる波長 2700 nm における値 $n = 1.42$ を用いた (付録参照)。表 2.3.1 にそれぞれの計測値および NA の値、 θ の値、 D の値を示す。但し、直径が 8.5 mm の時の計算値は装置固有の NA の値よりも大きかったため、装置固有の値 $NA = 0.45$ を用いた。

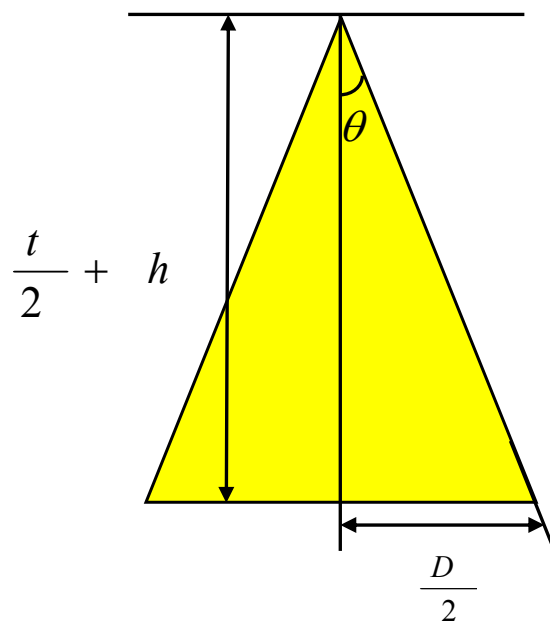


図 2.3.1 D, t, h の関係

表 2.3.1 算出した NA の値

D (mm)	8.5	6.0	5.0
NA	0.45	0.36	0.31
θ (rad)	0.32	0.29	0.25
θ (度)	18.5	16.8	14.1

2.4 接合界面における OH 基濃度分布に及ぼすビーム集光の効果

拡散を無視した場合の OH 基濃度分布の理論曲線を求める。図 2.4.1 で、 X に接合界面があるとする。ここで、 X は原点から接合界面までの距離、 d はサンプルの厚さ、 a はビームとサンプル表面の交差部分の半径、 x は a を用いて無次元化した距離 ($x = X/a$) である。このとき、図 2.4.1 で色を付けた部分は接合した一つのシリカガラスの部分、残りがもう一つのシリカガラスの部分に相当する。色を付けた部分の体積を $V(X)$ とすると、

$$V(X) = \int_{-y_x}^{y_x} S(X, y) dy \quad (2.4.1)$$

となる。ここで $S(X, y)$ は、

$$S(X, y) = \int_x^{\sqrt{a^2 - y^2}} \left(d - \frac{d}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx \quad (2.4.2)$$

である。式 (2.4.2) を式 (2.4.1) へ代入して計算すると、

$$V(X) = \frac{1}{3} \pi a^2 d f\left(\frac{X}{a}\right) \quad (2.4.3)$$

となる。ここで $f(x)$ は

$$f(x) = -\frac{2}{\pi} x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{1 - x^2} + \frac{x^3}{\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) \quad (2.4.4)$$

である。ここで $f(x)$ は図 2.4.1 で色を付けた部分を光が透る割合を表す。これを用いると、接合面付近の見かけの OH 基濃度分布 $C_{\text{app}}(x)$ は

$$\frac{C_{\text{app}} - C_-}{C_+ - C_-} = \begin{cases} 1 - f(|x|) & \text{if } x > 0 \\ f(|x|) & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (2.4.5)$$

となる。ここで、 C_{min} , C_{max} はそれぞれ図 2.4.2 に示すように OH 基濃度が低い方のシリカガラスの OH 基濃度および高い方の OH 基濃度を示す。

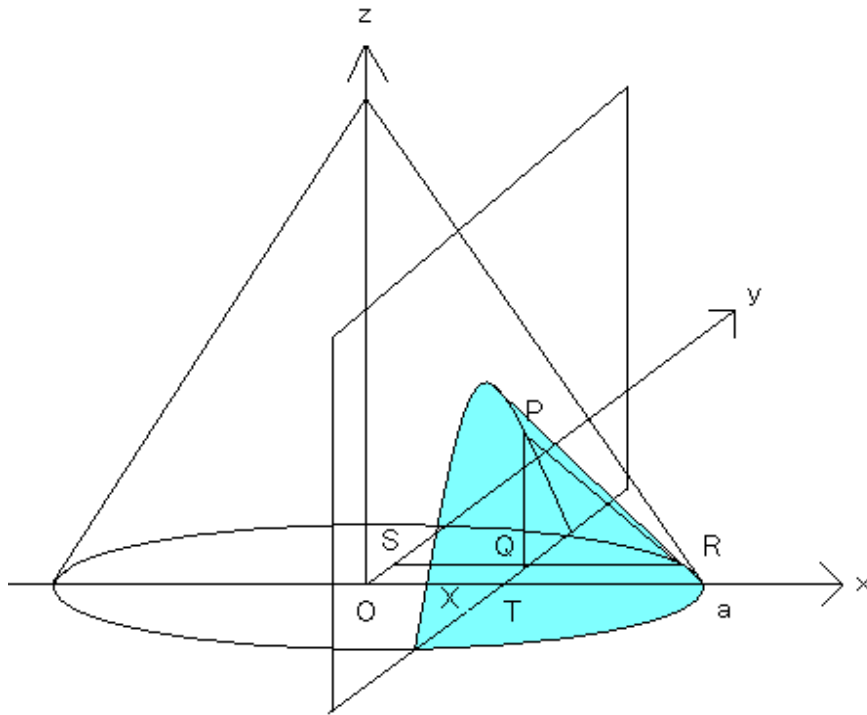


図 2.4.1 円錐の切断面の図

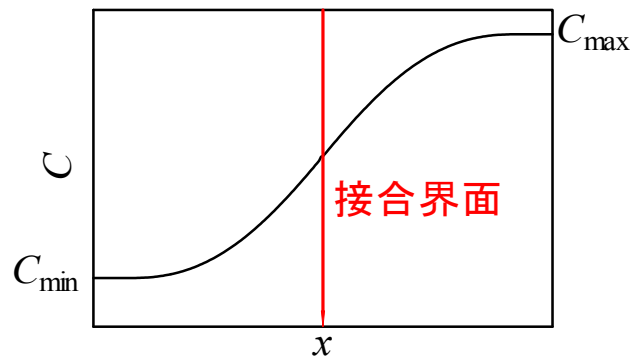


図 2.4.2 OH 基濃度分布

次にそれぞれの NA に対応する a を求め、その a を(2.4.5)式にかけ合わせたものと比較した図を示す。

以上の式の導出と a の求め方については付録に記載した。

表 1 : NA に対する θ と a の値

NA	θ (rad)	θ (度)	a (mm)
0.45	0.32	18.5	0.17
0.36	0.29	16.8	0.13
0.31	0.25	14.1	0.11

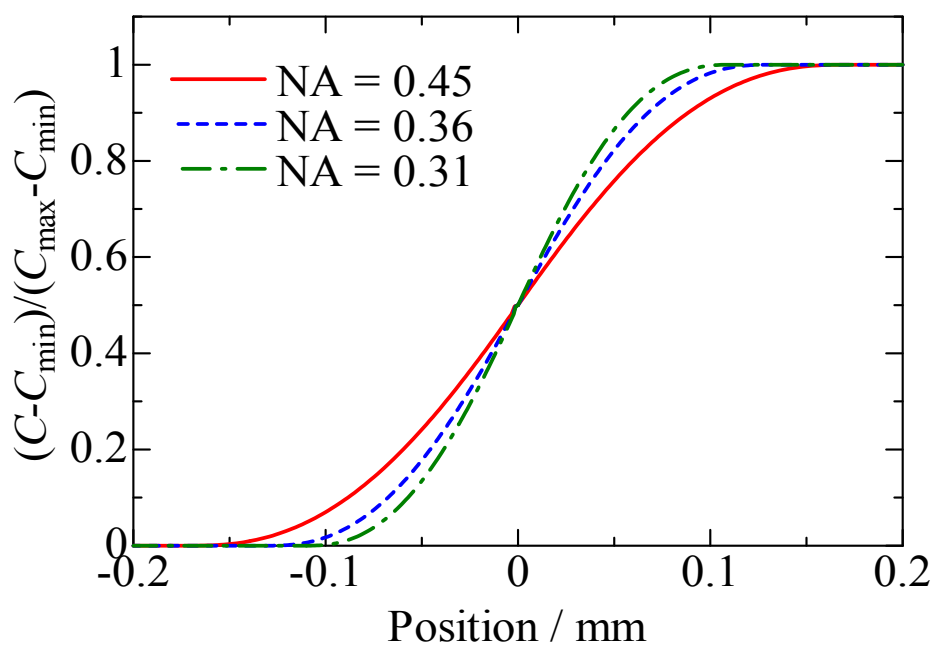


図 2 : 各種 NA に対する理論曲線 (2.4.5)

2.5 試料

本研究には、OH 基濃度の異なる 4 種類のシリカガラス(ES, ED-B, ED-C, ED-H)を使用した。それぞれの製造方法および OH 基濃度を表 2.5.1 に示す。また、これらのサンプル名は東ソー株式会社の商品名である。

異なる 2 種類のシリカガラスを 15 mm×45 mm×1.5 mm の形状に加工し、1.5 mm の厚さで向かい合った表面を鏡面研磨したものをを用いた。2つのシリカガラス板の研磨面をあわせて加重をかけ、1150°Cで 30 分加熱することにより接合した。測定のために図 2.5.1 に示すように断面を 0.5 mm の厚さに切断し表面を研磨した(図 2.5.1)。

ES と ED-B を接合したサンプルを ES+ED-B のようにあらわすことにする。接合した材質の組み合わせは以下の 3 種類である。

- ① ES+ED-B
- ② ES+ED-C
- ③ ES+ED-H

表 2.5.1 それぞれの製造方法に対する OH 基濃度

	ES	ED-H	ED-B	ED-C
製造方法	Ⅲ型(直接法)	スート法	スート法	スート法
OH (ppm)	1000~1500	< 80	< 10	< 5

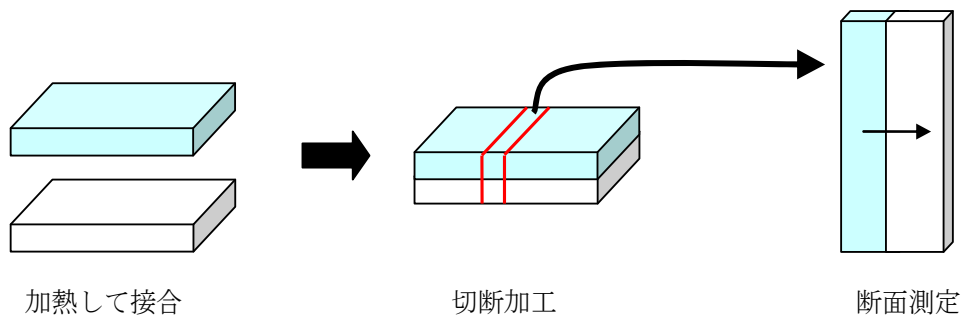


図 2.5.1 接合シリカガラスの加工の流れ

第3章 実験結果および考察

3.1 OH 基濃度分布

図3.1.1～3.1.3に各接合シリカガラス断面付近のOH基濃度分布の測定結果を示す。サンプルごとにNAを変えて測定したデータを同じ図にプロットしてある。いずれの場合も接合界面付近でのOH基濃度が緩やかに変化していることがわかる。

また、しぼりの間隔を変化させることによりNAの値を変化させてもOH基濃度分布にはあまり変化が見られないことがわかる。

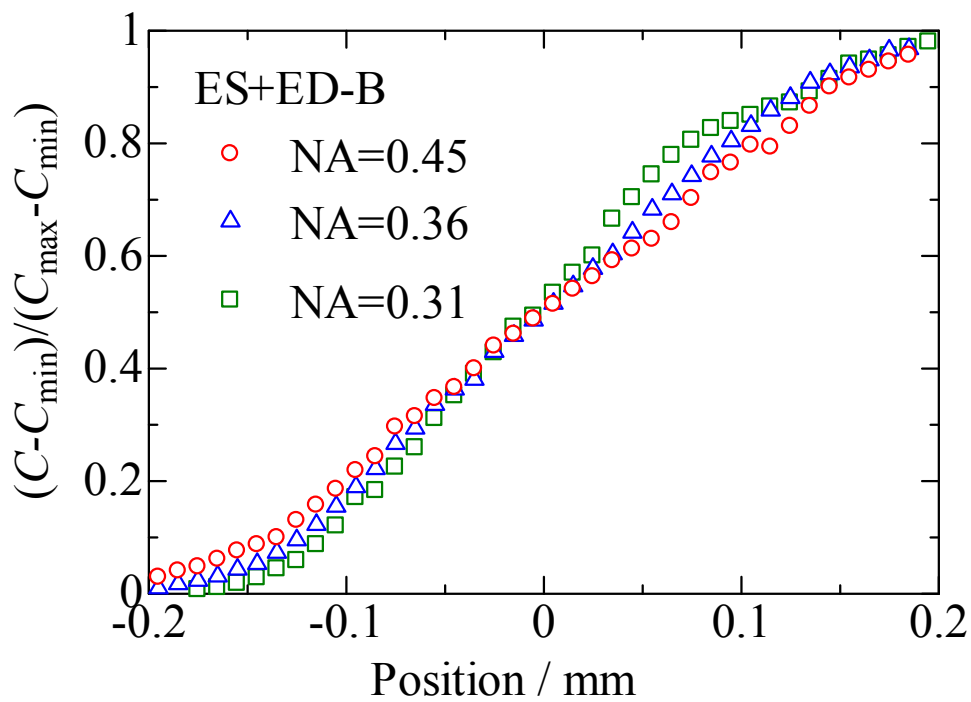


図 3.1.1 ES+ED-B に対する OH 基濃度分布

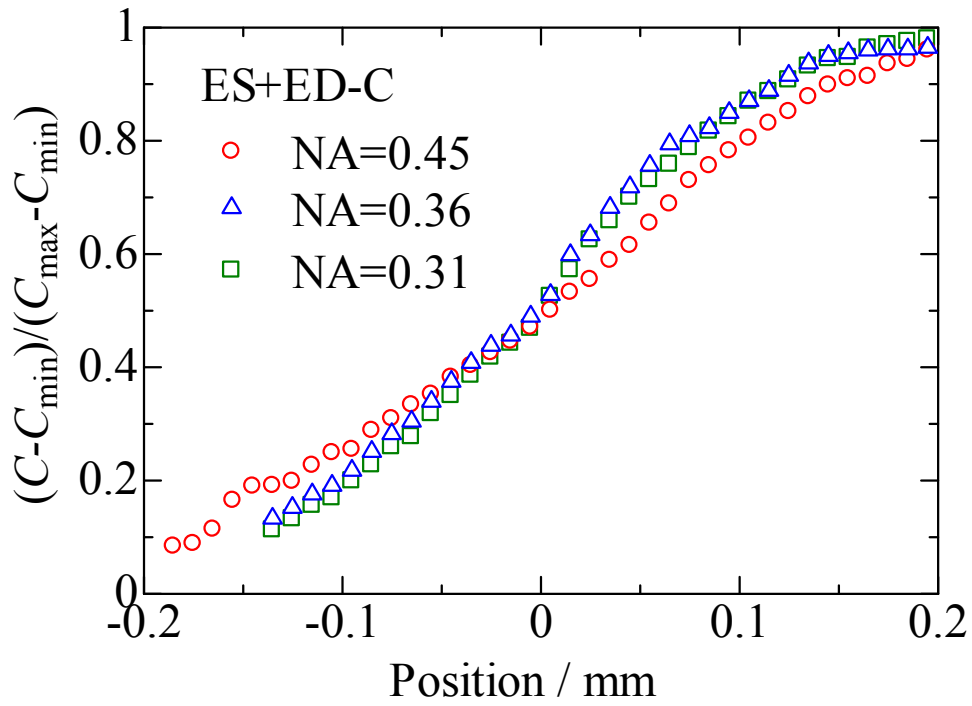


図 3.1.2 ES+ED-C に対する OH 基濃度分布

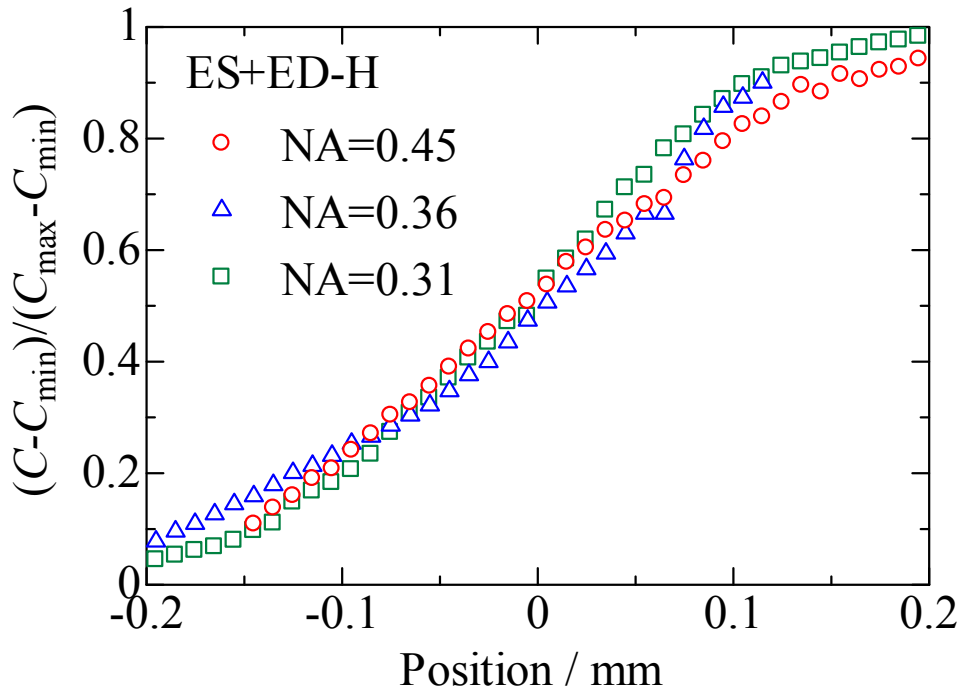


図 3.1.3 ES+ED-H に対する OH 基濃度分布

3.2 理論曲線との比較

図 3.2.1～3.2.3 は NA の値ごとに各サンプルの OH 基濃度分布の測定結果を拡散がない場合の理論曲線と比較したグラフである。

縦軸はそれぞれのサンプルのうち OH 基量の多いものを 1、少ないものを 0 として規格化したものである。

NA = 0.45, 0.36, 0.31 どの実験結果もすべて拡散がない場合の理論曲線よりも緩やかに変化している。

以上のことから、実際に OH 基が熱処理によって拡散している。

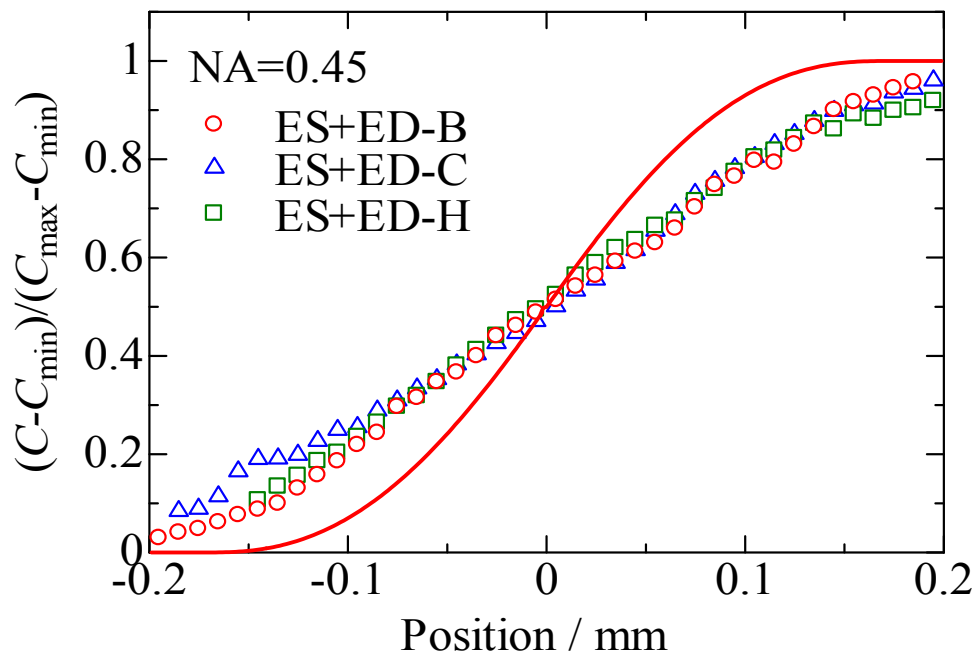


図 3.2.1 NA = 0.45 の時の理論曲線との比較

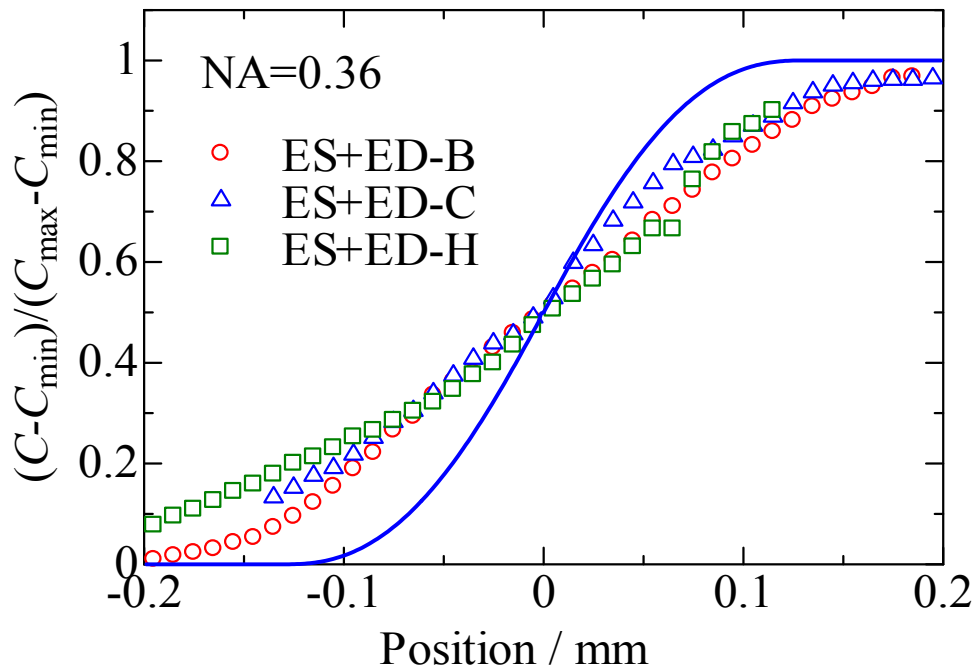


図 3.2.2 NA = 0.36 の時の理論曲線との比較

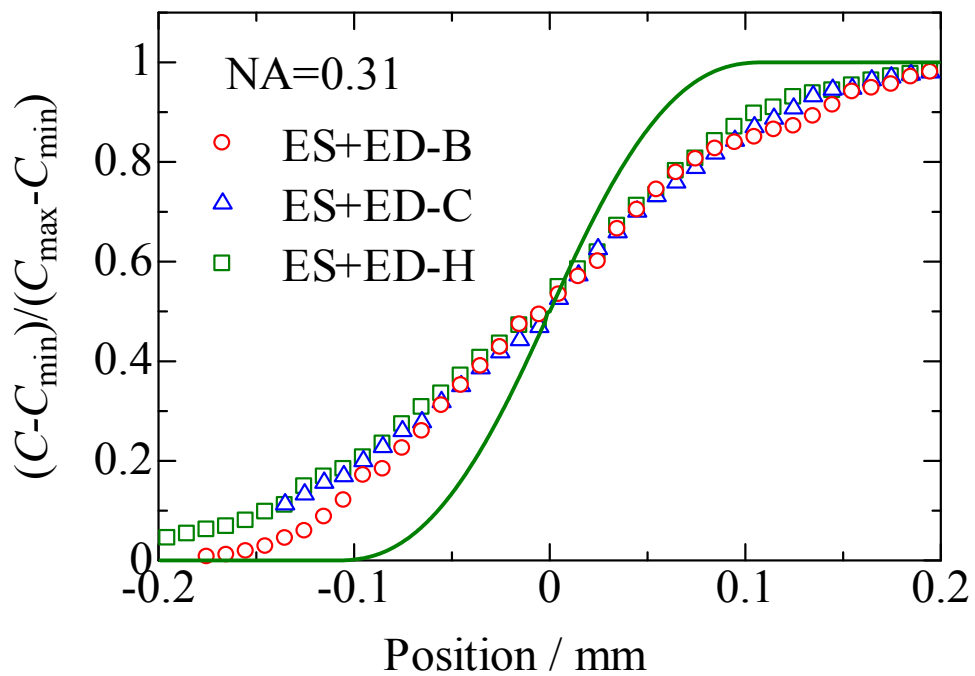


図 3.2.3 NA = 0.31 の時の理論曲線との比較

3.3 考察

OH 基濃度が高い ES と OH 基濃度の低いサンプル(ED-H, ED-B, ED-C)を接合して測定を行った。このときの接合界面付近での NA を変化させることによる、OH 基濃度分布の変化はあまり見られなかった。もしも、熱処理をした段階でシリカガラス中の OH 基が拡散していなければ、ビームの入射角度を変化させたときにみかけの OH 基濃度分布に変化が見られるはずである。しかしながら、実際に測定してみると見かけの OH 基濃度分布は測定ビームの NA の影響を受けなかった。これは、しぼりを手作業で作ったことにより多少の誤差が生じたためであると考えられる。[改善法としてしぼりを外部機関に作製してもらう必要があると考えられる。](#)

測定結果を OH 基の拡散がなく、接合界面で OH 基濃度が階段関数的に変化したと仮定した場合の理論曲線と比較した。NA = 0.45, 0.36, 0.31 どの実験結果もすべて拡散がない場合の理論曲線よりも緩やかに変化した。

このことから、熱処理によってシリカガラス中の OH 基濃度は拡散しており、測定値は実際の OH 基濃度分布をあらわしていると考えられる。

第4章 まとめ

工業的に幅広く活用されているが、そのメカニズムについてはあまり研究されていないシリカガラス接合界面付近の OH 基濃度分布について調べた。本研究では、接合にともない OH 基が実際に拡散しているかを確認することを目的とした。

大気中 1150°C で 30 分間加熱することにより接合したサンプルに対して、接合界面付近での OH 基の分布を顕微赤外分光光度計を用いて測定した。OH 基濃度の異なるシリカガラスを接合した場合、接合界面付近で OH 基濃度が緩やかに変化していた。

この緩やかな変化が、接合したシリカガラス間での OH 基の拡散によるものか、それとも測定時に測定ビームを集光しているための見かけ上のものなのかを判断するため、測定ビームにしぼりを入れ集光の角度を変えて OH 基濃度分布変化を測定した。

NA (レンズ開口数) が 0.45、0.36、0.31 の 3 段階のビームを用い、OH 基濃度の異なる 3 種類の組み合わせに対して OH 基濃度分布を測定した。

いずれのサンプルに対しても、NA の違いによる変化はあまり見られなかった。これらの結果を OH 基の拡散がなく、接合界面で OH 基濃度が階段関数的に変化したと仮定した場合の理論曲線と比較した。NA = 0.45, 0.36, 0.31 どの測定結果もすべて OH 基の拡散がない場合の理論曲線よりも緩やかに変化した。

以上のことから接合にともない実際に OH 基が拡散していることがわかる。

参考文献

- 1) 葛生 伸：「石英ガラスの世界」，工学調査会 (1995)
- 2) 榊原 伸哉：「シリカガラス接合界面付近の OH 濃度分布—測定ビーム集光効果の解析—」，福井大学工学部物理工学科卒業論文 (2010)
- 3) 日本分光：「フーリエ変換赤外分光法テキスト(I)」
- 4) 日本分光：「IRT-30 型顕微赤外付属装置」取り扱い説明書
- 5) N. Kuzuu, H. Horikoshi, A. Okazaki, T. Seki and M. Tanaka: J. Ceram. Soc. Japan, **117**, 211 (2009)

謝辞

卒業論文作成にあたり大勢の方々のご協力を頂いたことに感謝し、謝辞を述べさせていただきます。

ご指導下さった葛生伸教授には多くの貴重な御時間を割いて頂き仔細に渡りご指導頂きました。玉井良則准教授，古石貴裕准教授，田中光也講師には多岐に渡りご指導頂きました。また本研究室の本田直樹氏、榊原伸哉氏、小島辰也氏には多方面に渡り大変お世話になりました。ここに改めて感謝の意を表したいと思います。

本研究を行うにあたり、サンプル提供・サンプルの加工をしていただいた EQ 東ソー・エスジーエム株式会社および東ソー・クォーツ株式会社には感謝いたします。

付録
接合界面における
OH 濃度分布測定に及ぼす集光の効果

1. はじめに

OH 基濃度の異なるシリカガラスを接合した場合、測定ビームが集光されているために、OH 基濃度が段階関数的に変化をしても緩やかに変化するように見える。この効果を評価する。

2. ビーム集光の効果

測定に使われるビームの NA (Numerical Aperture) は次の式

$$NA = n \sin \theta \quad (1)$$

で定義される。測定に使用している顕微赤外分光光度計 (Irtron IRT-30-16-IRP 型赤外顕微鏡付きの日本分光 Herschel FT/IR-660 型フーリエ変換赤外分光光度計) では NA の値は、

$$NA = 0.45 \quad (2)$$

である。OH 基濃度の測定は波長 2700nm で行われる。このときの屈折率は Malitson の式 (I. H. Malitson, J. Opt. Soc. Am. **55** (1965) 1205)¹ を用いて計算すると、

$$n = 1.42 \quad (3)$$

となる。式(1) に 式(2), (3) を代入して、 $\sin \theta$ を求めると、

$$\sin \theta = \frac{NA}{n} = \frac{0.45}{1.42} = 0.32 \quad (4)$$

となる。これから θ を求めると、

$$\theta = 18.5^\circ \quad (5)$$

となる。

¹ $n^2 - 1 = \frac{0.6961663\lambda^2}{\lambda^2 - (0.0684043)^2} + \frac{0.4079426\lambda^2}{\lambda^2 - (0.1162414)^2} + \frac{0.8974794\lambda^2}{\lambda^2 - (9.896161)^2}$

ここで λ は μm 単位で表した波長である。

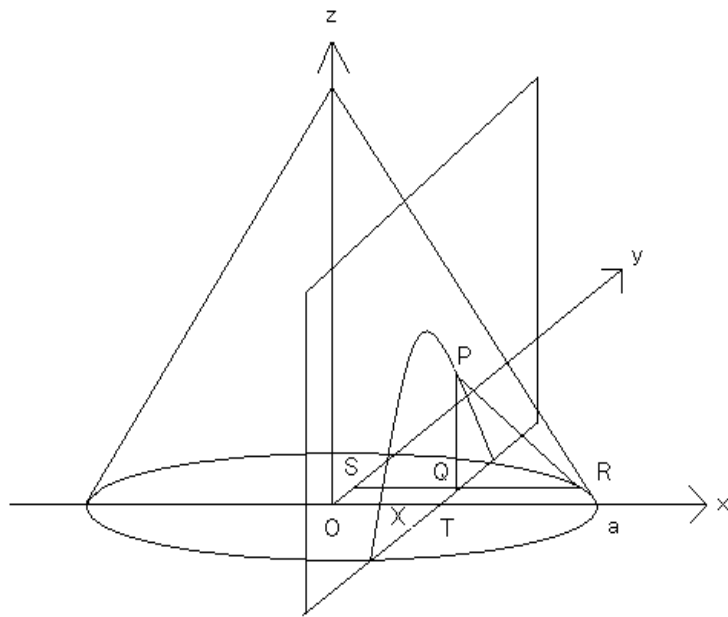


図 A.1 円錐の切断面の図

3. ビーム集光の効果

サンプルの厚さを d とする。下端面を $z = 0$ とする。また、下端面での円錐の底面の半径を a とする。シリカガラスの接合界面は、 $x = X$ のところにあるとする。

今、円錐を $x = X$ の平面で2分したとする。 $X > 0$ とするとき、円錐の $x > X$ の部分を切り取ったものの体積を $V(X)$ とする。円錐全体の体積を V_0 とすると、

$$V_0 = \frac{1}{3} \pi a^2 d \quad (6)$$

となる。

このとき、 $x = X$ の平面で分割した円錐 $x > X$ 部分の体積を $V_+(X)$, $x < X$ の部分の体積を $V_-(X)$ とすると、

$$\begin{aligned} X > 0 \text{ のとき} \quad & V_+(X) = V(X) \\ & V_-(X) = V_0 - V(X) \end{aligned} \quad (7)$$

となり、

$$\begin{aligned}
 X < 0 \text{ のとき} \quad V_+(X) &= V_0 - V(|X|) \\
 V_-(X) &= V(|X|)
 \end{aligned} \tag{8}$$

となる。

OH 基濃度を $C(x)$ であらわすと、

$$C(x) = \begin{cases} C_+ & \text{if } x > X \\ C_- & \text{if } x < X \end{cases} \tag{9}$$

となる。円錐の位置を x の位置におくと界面 X は $-x$ の位置にくるので、

$$C_{app}(x) = \frac{C_+V_+(-x) + C_-V_-(-x)}{V_0} \tag{10}$$

となる。

4. $V(X)$ の計算

まず円錐を式で表すことを考える。円錐の高さを d 、底面の半径を a とする。このとき、円筒座標で表すと図 A.1 の円錐は、

$$r = a - \frac{a}{d}z \tag{11}$$

となる。右辺をまとめると、

$$r = \frac{a}{d}(d - z) \tag{12}$$

となる。これをデカルト座標で表すと、

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{d}(d - z) \tag{13}$$

となる。これから z を求めると、

$$z = d - \frac{a}{d}\sqrt{x^2 + y^2} \tag{14}$$

となる。

つぎに $x = X$ で区切られた外側の面積 $V(X)$ を求める。円錐の $x = X$ で切断された曲線状の点 P を考える。 P から底面に下ろした垂線の足を Q とする。 PQ の

長さを z とすると、式(14)で $x = X$ とおけば良いので、

$$\overline{PQ} = z = d - \frac{d}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (15)$$

となる。

底面中の点 $R(x, y)$ に対して、

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (16)$$

が成り立つ。したがって、

$$\overline{SR} = x = \sqrt{a^2 - y^2} \quad (17)$$

となる。これから、

$$\overline{QR} = \overline{SR} - X = \sqrt{a^2 - y^2} - X \quad (18)$$

となる。直線 PQ , QR および xz 平面に平行で x を通る平面と円錐の交線 QR で囲まれた部分の面積を $S(X, y)$ とおくと、

$$V(X) = \int_{-y_x}^{y_x} S(X, y) dy \quad (19)$$

となる。ここで y_x は y の上限と下限を表す。これは、底面上の $x = X$ と底面の円周との公転の y 座標なので、

$$X^2 + y_x^2 = a^2 \quad (20)$$

が成り立つ。これから、

$$y_x = \sqrt{a^2 - X^2} \quad (21)$$

を得る。式(19) に 式(21) を代入し $S(X, y)$ が y に関して偶関数であることを用いると、

$$V(X) = 2 \int_0^{\sqrt{a^2 - X^2}} S(X, y) dy \quad (22)$$

となる。

次に $S(X, y)$ を実際に計算することにする。

$$S(X, y) = \int_x^{\sqrt{a^2 - y^2}} \left(d - \frac{d}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= d \int_X^{\sqrt{a^2-y^2}} dx - \frac{d}{a} \int_X^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} dx \\
&= d \left(\sqrt{a^2-y^2} - X \right) - \frac{d}{a} I(X, y)
\end{aligned} \tag{23}$$

となる。ここで、

$$I(X, y) \equiv \int_X^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{X^2+y^2} dx \tag{24}$$

とおいた。

ここで 式(10) に 式(7), (8) を代入した形を書き下しておく。

$x > 0$ のとき

$$\begin{aligned}
C_{app}(x) &= \frac{C_+(V_0 - V(|x|)) + C_-V(|x|)}{V_0} \\
&= C_+ - (C_+ - C_-) \frac{V(|x|)}{V_0} \\
&= C_+ - (C_+ - C_-) f(|x|)
\end{aligned} \tag{25}$$

となる。ここで、

$$f(|x|) \equiv \frac{V(|x|)}{V_0} \tag{26}$$

とおいた。

$x < 0$ のとき

$$\begin{aligned}
C_{app}(x) &= \frac{C_+V(|x|) + C_-(V_0 - V(|x|))}{V_0} \\
&= C_- + (C_+ - C_-) \frac{V(|x|)}{V_0} \\
&= C_- + (C_+ - C_-) f(|x|)
\end{aligned} \tag{27}$$

次に $V(X)$ の式(22) の積分を実行するにあたり次のような変数変換を行うことにする。

$$x = a\xi \tag{28}$$

$$y = a\eta \quad (29)$$

$$z = a\Xi \quad (30)$$

このとき、

$$dy = a d\eta \quad (31)$$

となり、積分範囲は、

$$y: 0 \rightarrow \sqrt{a^2 - X^2} \quad (32)$$

$$\eta: 0 \rightarrow \sqrt{1 - \Xi^2} \quad (33)$$

となるので、

$$V(x) = 2a \int_0^{\sqrt{1 - \Xi^2}} S(a\Xi, a\eta) d\eta \quad (34)$$

となる。式(23) から、

$$\begin{aligned} S(X, y) &= \int_X^{\sqrt{a^2 - y^2}} d - \frac{d}{a} \sqrt{x^2 + y^2} dx \\ &= \int_{\Xi}^{\sqrt{1 - \eta^2}} d - \frac{d}{a} \sqrt{a^2 \xi^2 + a^2 \eta^2} ad\xi \\ &= ad \int_{\Xi}^{\sqrt{1 - \eta^2}} \left(1 - \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right) d\xi \end{aligned} \quad (35)$$

となる。ここで、

$$\varphi(\Xi, \eta) = \left(\sqrt{1 - \eta^2} - \Xi\right) - \int_{\Xi}^{\sqrt{1 - \eta^2}} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\xi \quad (36)$$

とおくと $V(x)$ は 式(34) より、

$$V(x) = 2a^2 d \int_0^{\sqrt{1 - (X/a)^2}} \varphi(\Xi, \eta) d\eta \quad (37)$$

となる。次に $\varphi(\Xi, \eta)$ を具体的に計算する。式(36) から、

$$\begin{aligned} \varphi(\Xi, \eta) &= \left(\sqrt{1 - \eta^2} - \Xi\right) - \int_{\Xi}^{\sqrt{1 - \eta^2}} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\xi \\ &= \left(\sqrt{1 - \eta^2} - \Xi\right) - I(\Xi, \eta) \end{aligned} \quad (38)$$

ここで、

$$I(\Xi, \eta) = \int_{\Xi}^{\sqrt{1-\eta^2}} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\xi \quad (39)$$

とおいた。式(39) を計算するために不定積分を使って解く。

$$I_0 = \int \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\xi \quad (40)$$

を計算する。ここで、

$$\xi = |\eta| \sinh t \quad (41)$$

とおくと、

$$d\xi = |\eta| \cosh t dt \quad (42)$$

となる。双曲線関数に対して成り立つ関係式

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad (43)$$

を用いると、

$$1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t \quad (44)$$

となる。これから、

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{\eta^2 (1 + \sinh^2 t)} = \sqrt{\eta^2 \cosh^2 t} = |\eta| \cosh t \quad (45)$$

となる。ここで $\cosh > 0$ であることを用いた。式(45) を 式(40) に代入すると、

$$\begin{aligned} I_0 &= \int |\eta| \cosh t \times |\eta| \cosh t dt \\ &= |\eta|^2 \int \cosh^2 t dt = |\eta|^2 I_1 \end{aligned} \quad (46)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \cosh^2 t dt = \int \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{4} \int (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{-2t} + 2t \right) + C \\ &= \frac{1}{4} (\sinh 2t + 2t) + C = \frac{1}{4} \sinh 2t + \frac{1}{2} t + C_1 \end{aligned} \quad (47)$$

となる。ただし C は積分定数を表す。ここで、

$$\sinh^2 t = 2 \sinh t \cosh t \quad (48)$$

であるから 式(47) は、

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4} \times 2 \sinh t \cosh t + \frac{1}{2} t + C_1 \\ &= \frac{1}{2} \sinh t \cosh t + \frac{1}{2} t + C_1 \end{aligned} \quad (49)$$

となる。式(41) から、

$$\sinh t = \frac{\xi}{|\eta|} \quad (50)$$

となり、

$$\cosh t = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{|\eta|}\right)^2} = \frac{1}{|\eta|} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (51)$$

となる。

次に t を求めることにする。式(50) から、

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{\xi}{|\eta|} \quad (52)$$

である。これを整理すると、

$$e^t - 2 \frac{\xi}{|\eta|} - e^{-t} = 0 \quad (53)$$

となり、辺々に e^t をかけると、

$$e^{2t} - 2 \frac{\xi}{|\eta|} e^t - 1 = 0 \quad (54)$$

となる。これは e^t に関する 2 次方程式なので解の公式を使うと、

$$\begin{aligned} e^t &= \frac{2 \frac{\xi}{|\eta|} \pm \sqrt{4 \left(\frac{\xi}{|\eta|}\right)^2 + 4}}{2} = \frac{\xi}{|\eta|} \pm \sqrt{\left(\frac{\xi}{|\eta|}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{|\eta|} \left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

ここで、 $e^t > 0$ であるから、式(55)の解は

$$e^t = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{|\eta|} \quad (56)$$

となる。これから t を求めると

$$t = \ln \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{|\eta|} \right) \quad (57)$$

を得る。式(49) に 式(50),(51),(57) を代入すると、

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi}{|\eta|} \cdot \frac{1}{|\eta|} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{|\eta|} \right) + C_1 \quad (58)$$

これを 式(46) に代入すると

$$I_0 = \frac{1}{2} \xi \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\eta^2}{2} \ln \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{|\eta|} \right) + C_2 \quad (59)$$

となる。この結果を 式(39) に適応すると、

$$\begin{aligned} I(\Xi, \eta) &= \left[\frac{1}{2} \xi \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\eta^2}{2} \ln \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{|\eta|} \right) \right]_{\xi=\Xi}^{\xi=\sqrt{1-\eta^2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1-\eta^2} \sqrt{1-\eta^2 + \eta^2} + \frac{\eta^2}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1-\eta^2} + \sqrt{1-\eta^2 + \eta^2}}{|\eta|} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} \Xi^2 \sqrt{\Xi^2 + \eta^2} + \frac{\eta^2}{2} \ln \left(\frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2 + \eta^2}}{|\eta|} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1-\eta^2} - \frac{1}{2} \Xi \sqrt{\Xi^2 + \eta^2} + \frac{\eta^2}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-\eta^2}}{|\eta|} \right) - \frac{\eta^2}{2} \ln \left(\frac{\Xi + \sqrt{\Xi^2 + \eta^2}}{|\eta|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1-\eta^2} - \frac{1}{2} \Xi \sqrt{\Xi^2 + \eta^2} + \frac{\eta^2}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-\eta^2}}{\Xi + \sqrt{\Xi^2 + \eta^2}} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

となる。これを 式(38) に代入すると、

$$\begin{aligned} \varphi(\Xi, \eta) &= \left(\sqrt{1-\eta^2} - \Xi \right) - \frac{1}{2} \sqrt{1-\eta^2} + \frac{1}{2} \Xi \sqrt{\Xi^2 + \eta^2} - \frac{\eta^2}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-\eta^2}}{\Xi + \sqrt{\Xi^2 + \eta^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1-\eta^2} - \Xi + \frac{1}{2} \Xi \sqrt{\Xi^2 + \eta^2} - \frac{\eta^2}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-\eta^2}}{\Xi + \sqrt{\Xi^2 + \eta^2}} \right) \end{aligned} \quad (61)$$

となる。式(37) から、

$$V(x) = 2a^2 d \int_0^{\sqrt{1-\Xi^2}} \varphi\left(\frac{X}{a}, \eta\right) d\eta \quad (62)$$

である。ここで $V(0)$ は円錐の半分の体積に相当するので、

$$V(0) = \frac{1}{2} V_0 = \frac{1}{6} \pi a^2 d \quad (63)$$

となるはずである。式(62),(63) より

$$2a^2 d \int_0^{\sqrt{1-\Xi^2}} \varphi\left(\frac{X}{a}, \eta\right) d\eta = \frac{1}{6} \pi a^2 d \quad (64)$$

となる。これから

$$I_2 \equiv \int_0^1 \varphi(0, \eta) d\eta = \frac{\pi}{12} \quad (65)$$

とならなければならない。

これまでの計算が正しいことを確かめるために、実際に I_2 の積分を計算してみる。

式(61) で $\Xi = 0$ とおくと、

$$\varphi(0, \eta) = \frac{1}{2} \sqrt{1-\eta^2} + \frac{\eta^2}{2} \ln\left(\frac{|\eta|}{1+\sqrt{1+\eta^2}}\right) \quad (66)$$

となる。この式を 式(65) に代入する。

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-\eta^2} d\eta + \frac{1}{2} \int_0^1 \eta^2 \ln|\eta| d\eta - \frac{1}{2} \int_0^1 \eta^2 \ln(1+\sqrt{1-\eta^2}) d\eta \quad (67)$$

$$= \frac{1}{2} (I_3 + I_4 - I_5) \quad (68)$$

となる。ここで、

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-\eta^2} d\eta \quad (69)$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_0^1 \eta^2 \ln|\eta| d\eta \quad (70)$$

$$I_5 = \frac{1}{2} \int_0^1 \eta^2 \ln(1 + \sqrt{1 - \eta^2}) d\eta \quad (71)$$

である。以下 $I_3 \sim I_5$ を計算していく。

I_3 を計算するため

$$\eta = \sin \theta \quad (72)$$

とおく。このとき、

$$d\eta = \cos \theta d\theta \quad (73)$$

となり、積分範囲は、

$$\begin{aligned} \eta: 0 &\rightarrow 1 \\ \theta: 0 &\rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{aligned} \quad (74)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (75)$$

となる。 I_4 については部分積分を行うと

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \eta^2 \ln|\eta| d\eta = \left[\frac{1}{3} \eta^3 \ln|\eta| \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} \eta^3 \cdot \frac{1}{\eta} d\eta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 \eta^2 d\eta = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \eta^3 \right]_0^1 = -\frac{1}{9} \end{aligned} \quad (76)$$

を得る。

次に I_5 について計算を行う。

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \eta^2 \ln(1 + \sqrt{1 - \eta^2}) d\eta \\
 &= \left[\frac{1}{3} \eta^3 \ln(1 + \sqrt{1 - \eta^2}) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} \eta^3 \cdot \frac{\frac{1}{2} \sqrt{1 - \eta^2}^{\frac{1}{2}} \cdot (-2\eta)}{1 + \sqrt{1 - \eta^2}} d\eta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{\eta^4}{\sqrt{1 - \eta^2} + 1 - \eta^2} d\eta \tag{77}
 \end{aligned}$$

となる。ここで 式(72)~(74) と同様の変数変換を行うと、

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \theta}{\cos \theta + \cos^2 \theta} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos^2 \theta)^2}{1 + \cos \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos \theta)^2 (1 - \cos \theta)^2}{1 + \cos \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta - \cos^2 \theta + \cos^3 \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos \theta - \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos \theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \right]
 \end{aligned}$$

となる。ここで、最後の項の部分で $\sin \theta = t$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^1 t^2 dt \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \left[t^3 \cdot \frac{1}{3} \right]_0^1 \right\} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{9} \tag{78}
 \end{aligned}$$

となる。式(75),(76),(78) を 式(68) に代入すると、

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{9} - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{12} \pi \quad (79)$$

となる。これから式(65) が得られることが確認された。

今、

$$f(\Xi) = \frac{6}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-\Xi^2}} \varphi(\Xi, \eta) d\eta \quad (80)$$

とおき、式(62) に代入すると、

$$V(X) = \frac{1}{3} \pi a^2 df \left(\frac{X}{a} \right) \quad (81)$$

となる。

$V(X)$ を求めるために、式(80) で定義される関数 $f(\Xi)$ を導入した。積分の前の係数 $6/\pi$ は今後の計算の便宜のためにおいたものである。

5、 $f(\Xi)$ の計算

これまで $f(\Xi)$ の独立変数を Ξ としてきたが、これをより見やすい x で表すことにする。すなわち、

$$f(x) = \frac{6}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \varphi(x, y) dy \quad (82)$$

と書くことにする。ここで 式(61) で $\Xi \rightarrow x, \eta \rightarrow y$ のように置き換えると、

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{1-y^2} - x + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{1-y^2}} \quad (83)$$

となる。以下の計算で $x > 0$ のみを考えるので、 $|x|$ は x とあらわすことにする。

式(83) を 式(82) に代入すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2} dy - \frac{6x}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy + \frac{3x}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy \\ &\quad + \frac{3}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) dy - \frac{3}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \ln(1 + \sqrt{1-y^2}) dy \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{\pi} \varphi_1(x) - \frac{6x}{\pi} \sqrt{1-x^2} + \frac{3}{\pi} x \varphi_2(x) + \frac{3}{\pi} \varphi_3(x) - \frac{3}{\pi} \varphi_4(x) \quad (84)$$

となる。ここで、

$$\varphi_1(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2} dy \quad (85)$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy \quad (86)$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}) dy \quad (87)$$

$$\varphi_4(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \ln(1 + \sqrt{1-y^2}) dy \quad (88)$$

である。

* φ_1 の計算

$$y = \sin \theta \quad (89)$$

とおくと、

$$dy = \cos \theta d\theta \quad (90)$$

となる。積分範囲は、

$$y: 0 \rightarrow \sqrt{1-x^2} \quad (91)$$

$$\theta: 0 \rightarrow \theta_1 \quad (92)$$

となる。ただし、

$$\theta_1 = \arcsin \sqrt{1-x^2} \quad (93)$$

である。これらを用いると、

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \int_0^{\theta_1} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\theta_1} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\theta_1} \\
&= \frac{1}{2}\theta_1 + \frac{1}{2}[\sin \theta \cos \theta]_0^{\theta_1} = \frac{1}{2}\arcsin \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}[\sin \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta}]_{\sin \theta=0}^{\sin \theta=\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{2}\arcsin \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-(1-x^2)} \\
&= \frac{1}{2}\arcsin \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}|x|\sqrt{1-x^2} \\
&= \frac{1}{2}\arcsin \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} \tag{94}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $x > 0$ であるので絶対値を除いた。

* φ_2 の計算

$$y = x \sinh t \tag{95}$$

とおく。

$$dy = x \cosh t dt \tag{96}$$

となり積分範囲は、

$$\begin{aligned}
y: 0 &\rightarrow \sqrt{1-x^2} \\
t: 0 &\rightarrow t_1
\end{aligned} \tag{97}$$

である。ただし

$$t_1 = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right) \tag{98}$$

である。ここで

$$\operatorname{arcsinh} \xi = \ln \left(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1} \right) \tag{99}$$

であるから、

$$t_1 = \ln \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2} + 1} \right) = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right) \tag{100}$$

となる。

$$1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t \tag{101}$$

であることを注意すると、

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy \\
&= \int_0^{t_1} \sqrt{x^2 + x^2 \sinh^2 t} \cdot x \cosh t dt \\
&= \int_0^{t_1} x \sqrt{1 + \sinh^2 t} \cdot x \cosh t dt \\
&= \int_0^{t_1} x^2 \cosh^2 t dt
\end{aligned} \tag{102}$$

となる。

$$\begin{aligned}
\cosh^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\cosh 2t + 1}{2}
\end{aligned} \tag{103}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \frac{x^2}{2} \int_0^{t_1} (\cosh 2t + 1) dt \\
&= \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{2} \sinh 2t + t \right]_0^{t_1}
\end{aligned} \tag{104}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\sinh 2t &= \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = 2 \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} = 2 \sinh t \cdot \cosh t \\
&= 2 \sinh t \sqrt{1 + \sinh^2 t}
\end{aligned} \tag{105}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \frac{x^2}{2} \left[\sinh t \sqrt{1 + \sinh^2 t} \right]_{\sinh t=0}^{\sinh t=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}} + \frac{x^2}{2} [t_1]_0^{t_1} \\
&= \frac{x^2}{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \sqrt{1 + \frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{x^2}{2} t_1 \\
&= \frac{x^2}{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} t_1 \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} x^2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right)
\end{aligned} \tag{106}$$

となる。

* φ_3 の計算

φ_3 の計算をするために、まず部分積分を行い変形する。

$$\begin{aligned}
 \varphi_3(x) &= \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) dy \\
 &= \left[\frac{1}{3} y^3 \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} - \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{3} y^3 \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (-2y)}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} dy \\
 &= \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1-x^2}) - \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^4}{x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2} dy \\
 &= \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \ln(1+x) - \frac{1}{3} \varphi_5(x) \tag{107}
 \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\varphi_5(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^4}{x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2} dy \tag{108}$$

である。式(108) の積分を行うために φ_2 と同様に式(96) の変数変換を行う。

$$y = \sinh t \tag{109}$$

とおく。

$$\begin{aligned}
\varphi_5(x) &= \int_0^{t_1} \frac{x^4 \sinh^4 t}{x^2 \cosh t + x^2 \cosh^2 t} x \cosh t dt \\
&= x^3 \int_0^{t_1} \frac{\sinh^4 t}{\cosh t + 1} dt \\
&= x^3 \int_0^{t_1} \frac{(\cosh^2 t - 1)^2}{\cosh t + 1} dt \\
&= x^3 \int_0^{t_1} \frac{(\cosh t + 1)^2 (\cosh t - 1)^2}{\cosh t + 1} dt \\
&= x^3 \int_0^{t_1} (\cosh t + 1)(\cosh t - 1)^2 dt \\
&= x^3 \int_0^{t_1} (\cosh^3 t - \cosh^2 t - \cosh t + 1) dt \\
&= x^3 \int_0^{t_1} \left[(1 + \sinh^2 t) \cosh t - \frac{\cosh 2t + 1}{2} - \cosh t + 1 \right] dt \\
&= x^3 \int_0^{t_1} \left(\sinh^2 t \cosh t - \frac{1}{2} \cosh 2t + \frac{1}{2} \right) dt \\
&= x^3 \int_0^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}} y^2 dy - \frac{x^3}{2} \int_0^{t_1} \cosh 2t dt + \frac{x^3}{2} \int_0^{t_1} dt \\
&= x^3 \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}} - \frac{x^3}{2} \left[\frac{1}{2} \sinh 2t \right]_0^{t_1} + \frac{x^3}{2} t_1 \\
&= \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{2} \sinh t_1 \cosh t_1 + \frac{x^3}{2} t_1 \\
&= \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{2} \sinh t_1 \sqrt{1 + \sinh^2 t_1} + \frac{x^3}{2} t_1 \\
&= \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \sqrt{1 + \frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{x^3}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right) \\
&= \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right) \tag{110}
\end{aligned}$$

となる。式(109) を 式(107)へ代入して、

$$\begin{aligned}
\varphi_3(x) &= \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \ln(1+x) - \frac{1}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
&\quad - \frac{1}{6} x \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{6} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right) \tag{111}
\end{aligned}$$

となる。

* φ_4 の計算

最後に φ_4 を求めることにする。

$$\begin{aligned}\varphi_4(x) &= \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \ln(1 + \sqrt{1-y^2}) dy \\ &= \left[\frac{1}{3} y^3 \ln(1 + \sqrt{1-y^2}) \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} - \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{3} y^3 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} (-2y)}{1 + \sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \ln(1 + \sqrt{1-(1-x^2)}) + \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2} + 1-y^2} dy \\ &= \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \ln(x+1) + \frac{1}{3} \varphi_6(x)\end{aligned}\tag{112}$$

となる。ここで、

$$\varphi_6(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2} + 1-y^2} dy\tag{113}$$

である。式(113) を計算するために 式(89) と同じ変換を行う。

$$\begin{aligned}
\varphi_6(x) &= \int_0^{\theta_1} \frac{\sin^4 \theta}{\cos \theta + \cos^2 \theta} \cos \theta d\theta \\
&= \int_0^{\theta_1} \frac{(1 - \cos^2 \theta)^2}{1 + \cos \theta} d\theta \\
&= \int_0^{\theta_1} \frac{(1 + \cos \theta)^2 (1 - \cos \theta)^2}{1 + \cos \theta} d\theta \\
&= \int_0^{\theta_1} (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)^2 d\theta \\
&= \int_0^{\theta_1} (1 - \cos \theta - \cos^2 \theta + \cos^3 \theta) d\theta \\
&= \int_0^{\theta_1} \left(1 - \cos \theta - \frac{\cos 2\theta + 1}{2} + (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta \right) d\theta \\
&= \int_0^{\theta_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \sin^2 \theta \cos \theta \right) d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\theta_1} - \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy \\
&= \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 - \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \theta_1 - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \tag{114}
\end{aligned}$$

式(114) を 式(112) へ代入して、

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \ln(x+1) + \frac{1}{6} \arcsin \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{6} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \tag{115}$$

となる。

* $f(x)$ の計算

式(84) から、

$$\varphi_4(x) = \frac{3}{\pi} \varphi_1(x) - \frac{6x}{\pi} \sqrt{1-x^2} + \frac{3}{\pi} x \varphi_2(x) + \frac{3}{\pi} \varphi_3(x) - \frac{3}{\pi} \varphi_4(x) \tag{84}$$

であり、式(95),(107),(112),(116) から、

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \quad (94)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} x^2 \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \ln(1+x) - \frac{1}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{6} x \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{6} \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) \end{aligned} \quad (111)$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \ln(x+1) + \frac{1}{6} \arcsin \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{6} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \quad (115)$$

である。式(84) に 式(94),(106),(111),(115) を代入すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2\pi} \arcsin \sqrt{1-x^2} + \frac{3}{2\pi} x \sqrt{1-x^2} - \frac{6}{\pi} x \sqrt{1-x^2} + \frac{3}{2\pi} x \sqrt{1-x^2} \\ &\quad + \frac{3}{2\pi} x^3 \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) + \frac{2}{3\pi} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \ln(1+x) - \frac{1}{3\pi} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} x \sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{2\pi} \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) - \frac{1}{\pi} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \ln(x+1) - \frac{1}{2\pi} \arcsin \sqrt{1-x^2} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3\pi} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} (3-12+3+1+1) x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2\pi} (3-1) \arcsin \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{2\pi} (3-1) \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) \\ &= -\frac{2}{\pi} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{\pi} \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) \end{aligned} \quad (116)$$

となる。

この式は、

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{\pi} \arcsin 1 = \frac{1}{2} \\ f(1) &= 0 \end{aligned} \quad (117)$$

を満たしている。

6. $C_{app}(x)$ のプロット

簡単のため、 $C_- = 0$ の場合を考える。このとき、式(25),(27) から、式(25) で $C_- = 0$ とおき、辺々を C_+ で割ると、

$$\frac{C_{app}(x)}{C_+} = 1 - f(|x|) \quad (118)$$

となる。式(27) で $C_- = 0$ とおき、辺々を C_+ で割ると、

$$\frac{C_{app}(x)}{C_+} = f(|x|) \quad (119)$$

となる。これらをまとめると、

$$\frac{C_{app}(x)}{C_+} = \begin{cases} 1 - f(|x|) & x > 0 \text{ のとき} \\ f(|x|) & x < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (120)$$

となる。

次に $C_- \neq 0$ の場合を考える。

式(25) および(27)から、それぞれ

$x > 0$ のとき

$$C_{app}(x) - C_- / C_+ - C_- = 1 - f(|x|) \quad (121)$$

$x < 0$ のとき

$$C_{app}(x) - C_- / C_+ - C_- = f(|x|) \quad (122)$$

となる。したがって、 $C_- = 0$ の場合で分布は同じになる。

7. a の値

実際の測定値と比較するため、 $\theta = 14.1^\circ$ として a を求める。 $d = 0.5$ であるので、

$$a = d \tan \theta = 0.5 \times 0.22 = 0.11 \text{ mm} \quad (123)$$

となる。以下にそれぞれのNAに対応する a の値を示す。

表1：NA に対する θ と a の値

NA	θ (rad)	θ (度)	a (mm)
0.45	0.32	18.5	0.17
0.36	0.29	16.8	0.13
0.31	0.25	14.1	0.11

実際の長さは(120)～(122)における無次元化した長さ ξ に a をかけたものである。これをそれぞれのNAに対してプロットしたものが図A.2である。

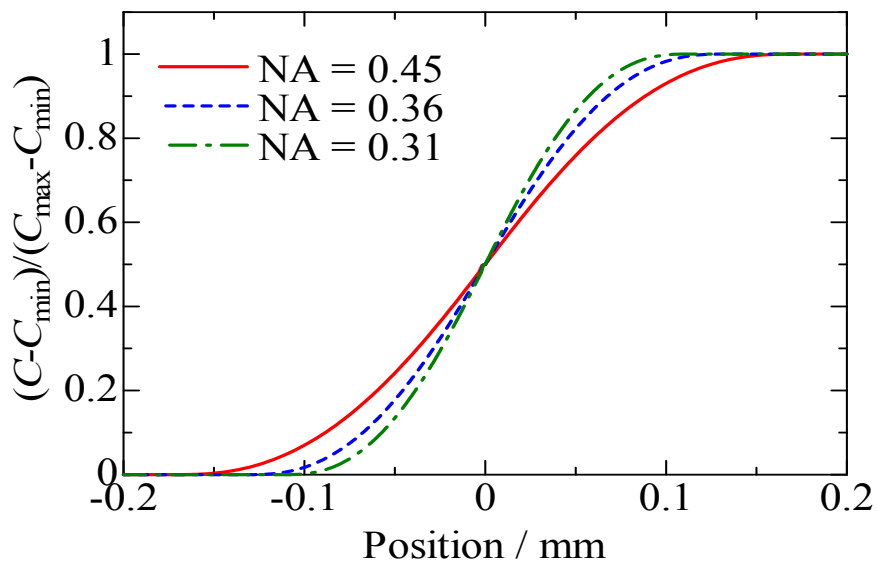


図 A.2：各種 NA に対する理論曲線